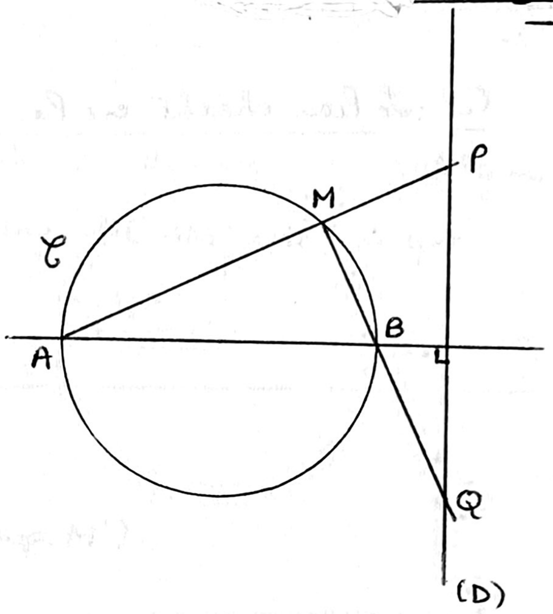
LIEUX GEOMÉTRIQUES

~

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

M parcourt le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB], et (D) est une dte perpendiculaire à (AB). On note P et Q les int. des dtes (AM) et (MB) avec la droite (D). Lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles APQ ?

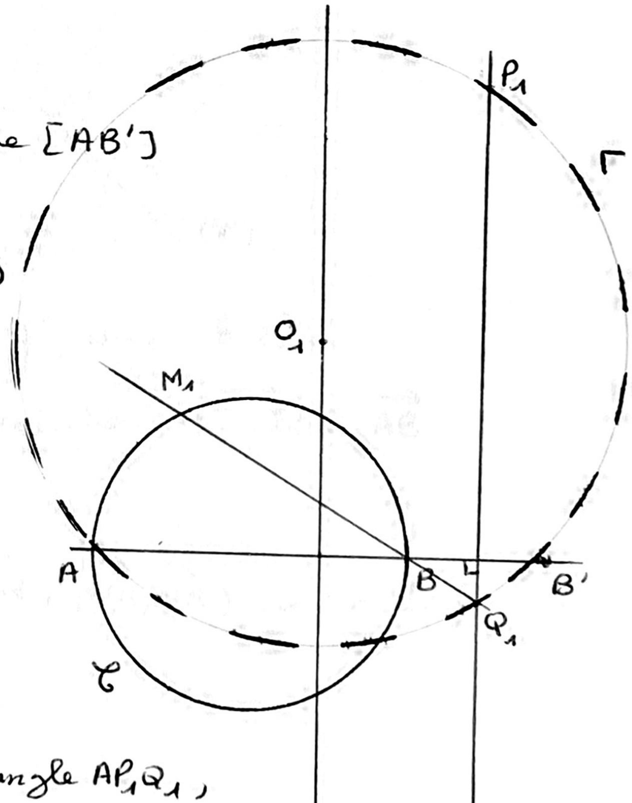


* B apparaît comme l'orthocentre du triangle APQ. On sait que le symétrique de l'orthocentre d'un triangle /à l'un des côtés du triangle appartient au cercle circonscrit à ce triangle. Ici, le symétrique B' de B /à (D) sera sur le cercle Γ circonscrit à APQ. Si O désigne le centre de Γ, O appartiendra à la médiatrice de [AB'].

* Réc., notons (Δ) la médiatrice de [AB'] et soit $O_1 \in (\Delta)$. Le cercle Γ de centre O_1 et de rayon O_1A coupe (D) en P_1 et Q_1. Soit M_1 l'∩ de (BQ_1) et $\mathcal{C}$.

On a :

$(AM_1) \perp (M_1B)$ car $M_1 \in \mathcal{C}$
$(AP_1) \perp (BQ_1)$ car B est l'orthocentre de AP_1Q_1 (en effet, B' ∈ Γ et (AB') est une hauteur du triangle AP_1Q_1, donc le symétrique de B' /au côté (P_1Q_1) sera l'orthocentre de AP_1Q_1, c'est B)



donc A, M_1 et P_1 sont alignés, et la réciproque aboutit.

(réf. Terracher TCE 92 I p 94)

(…/…)

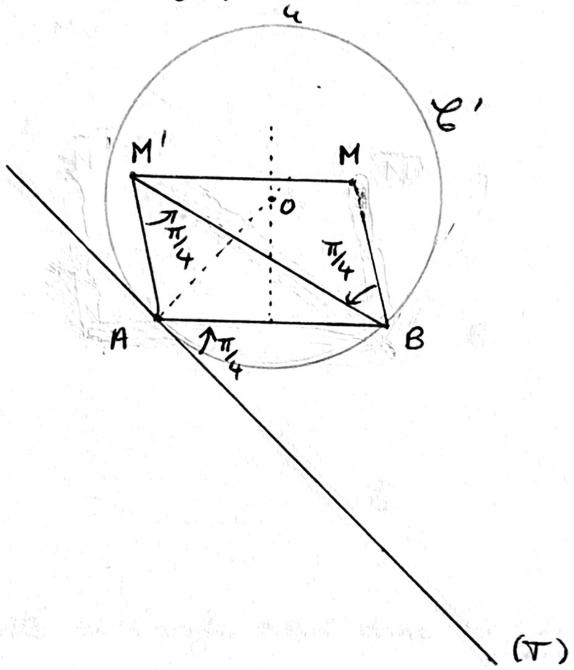
Ccl : Le lieu cherché est la médiatrice de [AB'].

Etant donnés 2 pts A et B, trouver le lieu des points M tels que le 4ème sommet du parallélogramme ABMM' soit tel que

$$(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM'}) = \frac{\pi}{4} \quad \text{mod.}\pi$$

Soit $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) le lieu des pts M (resp. M').

$M' \in \mathcal{E}' \Rightarrow M' \in \mathcal{C}'$ où $\mathcal{C}'$ est le cercle circonscrit à ABM'_0 où M'_0 est un pt tel que $(\overrightarrow{M'_0A}, \overrightarrow{M'_0B}) = \frac{\pi}{4}$ mod π.



Réc., tout point de $\mathcal{C}'$ est dans $\mathcal{E}'$, donc $\mathcal{E}' = \mathcal{C}'$.

$\mathcal{E}$ sera l'image de $\mathcal{C}'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

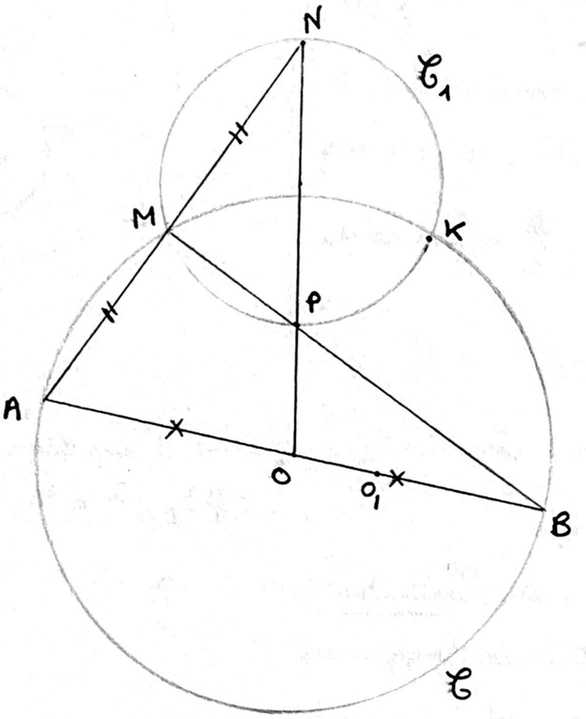
<u>Objectif</u> : - utiliser l'ensemble $\{N \,/\, (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \alpha \mod \pi\}$

(réf. Tenacher TCE 92 I p 94)

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, [AB] un diamètre de $\mathcal{C}$, M un point de $\mathcal{C}$. On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection de (ON) et (BM).

a) Quel est le lieu des points P quand M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

b) On note K le second point d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle circonscrit à MNP. Démontrer que les points K, P, B, O sont cocycliques.



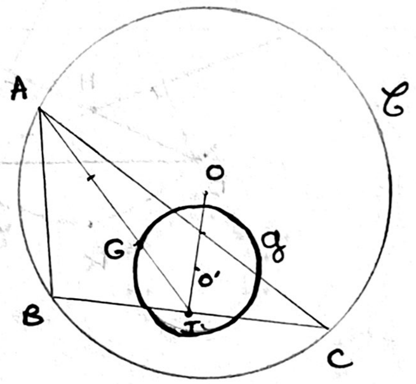
a) P est le centre de gravité du triangle ABN donc est l'image de M par l'homothétie h de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$. L'image du cercle $\mathcal{C}$ par h est le lieu des points P : on obtient le cercle de centre $O_1 = h(O)$ et de rayon $O_1B = \frac{2OB}{3}$ auquel il faut enlever le point diamétralement opposé à B, et B lui-même (car $M \neq A$ et $M \neq B$ par hyp.)

b) $\widehat{(BO,BK)} = \widehat{(BA,BK)} \underset{\mathcal{C}}{=} \widehat{(MA,MK)} = \widehat{(MN,MK)} \underset{\mathcal{C}_1}{=} \widehat{(PN,PK)} = \widehat{(PO,PK)}$

$\widehat{(BO,BK)} = \widehat{(PO,PK)}$ entraîne bien que les points B, O, K, P sont alignés ou cocycliques. Dans ce travail, on suppose que $M \neq A$ et $M \neq B$ pour que P soit bien défini. Donc P, O, B ne seront pas alignés, donc B, O, K, P seront cocycliques.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle fixe. [BC] est une corde fixe de $\mathcal{C}$, et A est un point qui décrit $\mathcal{C}$. Trouver l'ensemble $\mathcal{G}$ des centres de gravité et l'ensemble $\mathcal{H}$ des orthocentres de ABC quand A décrit $\mathcal{C}$.

1)



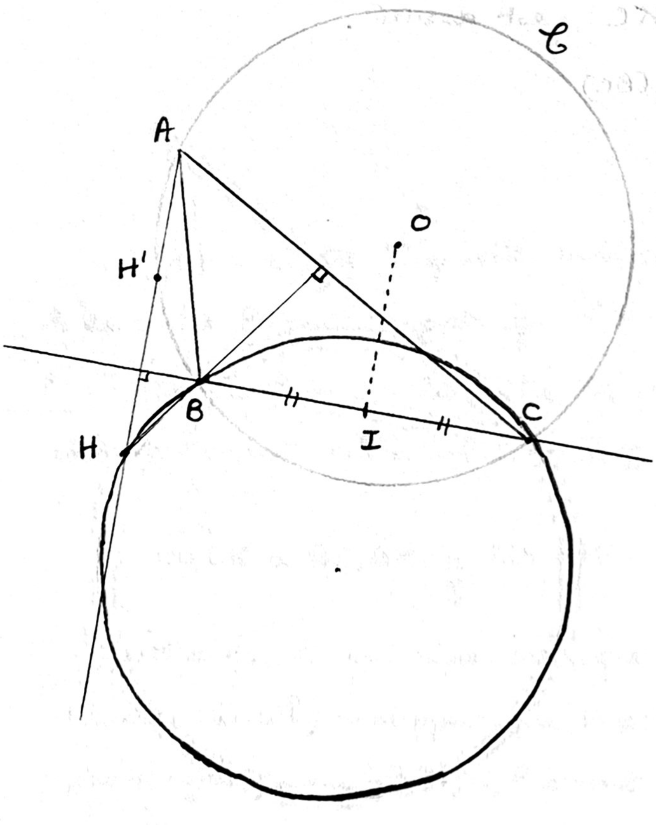
$\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IA}$ (où I milieu de [BC])

G est donc l'image de A par l'homothétie $h_{I,\frac{1}{3}}$ de centre I et de rapport $\frac{1}{3}$

On en déduit : $\mathcal{G}$ sera l'image du cercle $\mathcal{C}$ par $h_{I,\frac{1}{3}}$, ie le cercle de centre $h_{I,\frac{1}{3}}(O) = O'$ et de rayon $\frac{R}{3}$ (si $\mathcal{C}$ est de rayon R).

2) 1re solution : On sait que O, H et G sont alignés sur la droite d'Euler et $\vec{OH} = 3\vec{OG}$

On en déduit $\mathcal{H} = h_{O,3}(\mathcal{G})$.



2e solution (*) : Le symétrique de l'orthocentre H par rapport au côté (BC) est sur le cercle $\mathcal{C}$, donc : $H = s_{BC}(H')$

et $\mathcal{H}$ est le symétrique de $\mathcal{C}$ par rapport à (BC).

3e solution : On cherche une transformation faisant passer de A à H', puis à H :

$$A \overset{s_D}{\longmapsto} H' \overset{s_{BC}}{\longmapsto} H$$

où s_D = symétrie /à médiatrice D de [AH'].
(d'ailleurs D = droite // à (BC) passant par O)

Alors : $H = s_{BC} \circ s_D (A)$

Comme $s_{BC} \circ s_D = 2\,\vec{OI}$ on conclut : $\mathcal{H} = t_{2\vec{OI}}(\mathcal{C})$

$\mathcal{H}$ est le translaté du cercle $\mathcal{C}$ suivant le vecteur $2.\vec{OI}$.

CQFD

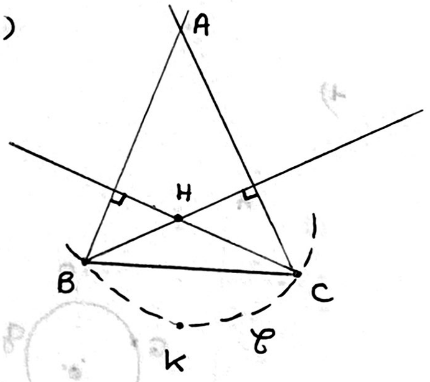
(*) Reprenons la 2e solution en détail :

* Le symétrique de l'orthocentre d'un triangle /à un des côtés du triangle appartient au cercle circonscrit à ce triangle.

Si H est l'orthocentre d'un de nos triangles ABC, on aura donc

$$s_{BC}(H) \in \mathcal{C} \quad \text{d'où} \quad H \in s_{BC}(\mathcal{C})$$

Ainsi $\mathcal{H} \subset s_{BC}(\mathcal{C})$.



* Il faut envisager la réciproque :

Soit $H \in s_{BC}(\mathcal{C})$. Posons $K = s_{BC}(H) \in \mathcal{C}$

On construit A tel que :

$$\begin{cases} (AB) \perp (CH) \\ (AC) \perp (BH) \end{cases}$$

Par construction, H sera l'orthocentre du triangle ABC, et conclure à $H \in \mathcal{H}$ revient à prouver que $A \in \mathcal{C}$:

$$A \in \mathcal{C} \iff A, B, C, K \text{ cocycliques} \iff \widehat{AB, AC} = \widehat{KB, KC}$$

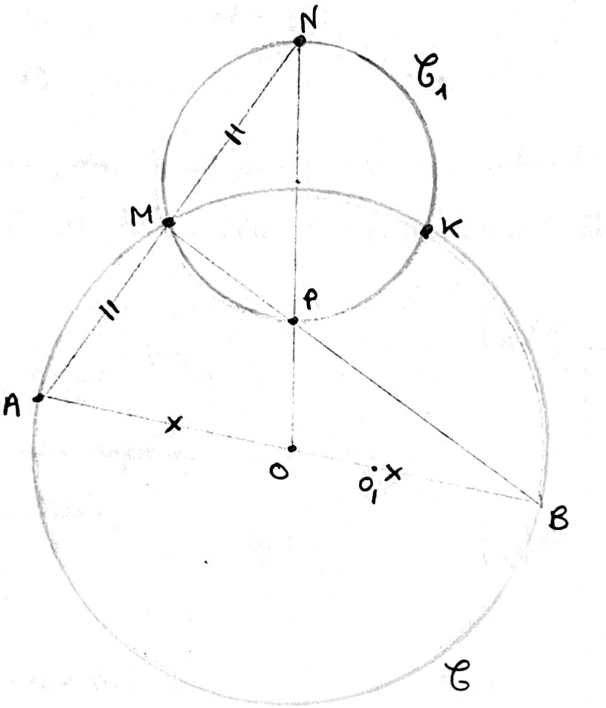
et $\widehat{AB, AC} = \widehat{HC, HB} = \widehat{KB, KC}$ est assuré.

↑ dtes perpendiculaires ↑ sym. /à (BC)

Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, [AB] un diamètre de $\mathcal{C}$, M un point de $\mathcal{C}$. On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection de (ON) et (BM).

a) Quel est le lieu des points P quand M décrit le cercle $\mathcal{C}$?

b) On note K le second point d'intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle circonscrit à MNP. Démontrer que les points K, P, B, O sont cocycliques.



a) P est le centre de gravité du triangle ABN donc est l'image de M par l'homothétie h de centre B et de rapport $\frac{2}{3}$. L'image du cercle $\mathcal{C}$ par h est le lieu des points P : on obtient le cercle de centre $O_1 = h(O)$ et de rayon $O_1B = \frac{2OB}{3}$ auquel il faut enlever le point diamétralement opposé à B, et B lui même (car $M \neq A$ et $M \neq B$ par hyp.)

b) $\widehat{BO,BK} = \widehat{BA,BK} \underset{\mathcal{C}}{=} \widehat{MA,MK} = \widehat{MN,MK} \underset{\mathcal{C}_1}{=} \widehat{PN,PK} = \widehat{PO,PK}$

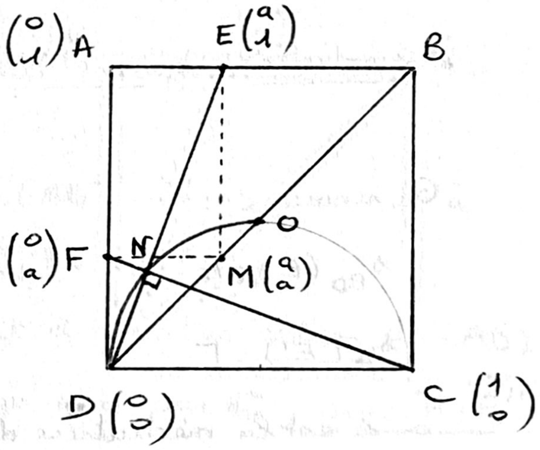
$\widehat{BO,BK} = \widehat{PO,PK}$ entraîne bien que les points B, O, K, P sont alignés ou cocycliques.

Dans ce travail, on suppose que $M \neq A$ et $M \neq B$ pour que P soit bien défini. Donc P, O, B ne seront pas alignés, donc B, O, K, P seront cocycliques.

Soient un carré ABCD et M un point variable sur [BD].
M se projette orthogonalement en E sur [AB], et en F sur [AD]
Soit $N = [DE] \cap [CF]$.
Trouver l'ensemble des points N quand M varie sur [BD].

Essais : Si M = D, alors N = D
Si M = B, alors N = O

Après qques essais, de forts soupçons se portent sur le quart de cercle $\widehat{DO}$ du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [CD]. D'où la question : (ED) ⊥ (FC) ?



• 1 solution : Analytique

On se place dans un repère orthonormal judicieux.

(DE) : $y = \frac{1}{a}x$

(CF) : $y = -ax + a$

Les coordonnées de N seront donc :

$$N \begin{pmatrix} \dfrac{a^2}{1+a^2} \\ \dfrac{a}{1+a^2} \end{pmatrix} \quad \text{où } a \text{ varie dans } [0,1]$$

L'équation de $\mathcal{C}$ est : $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

On vérifie que $N \in \mathcal{C}$, puis on étudie les variations des fonctions

$$a \overset{f}{\longmapsto} \frac{a^2}{1+a^2} \quad \text{et} \quad a \longmapsto \frac{a}{1+a^2}$$

pour connaître exactement la partie du cercle $\mathcal{C}$ décrite par N quand a parcourt [0,1].

(réf. IPR Lorraine)

* Étude de $f(a) = \frac{a^2}{1+a^2}$ pour $a \in [0,1]$

$f'(a) = \frac{2a}{(1+a^2)^2} \geq 0$ donc f est croissante, continue et :

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, \tfrac{1}{2}]$$

* On constate que $\frac{a}{1+a^2}$ pour tout $a \in [0,1]$.

Ccl : L'ensemble $\mathcal{E}$ cherché est bien inclus le quart de cercle $\widehat{DO}$ annoncé.

Réc. : On vérifie facilement, en utilisant le Th. des val. int. pour f (par ex.) que tout point N de $\widehat{DO}$ est tel qu'il existe $a \in [0,1]$ tq $N\begin{pmatrix} f(a) \\ g(a) \end{pmatrix}$. CQFD

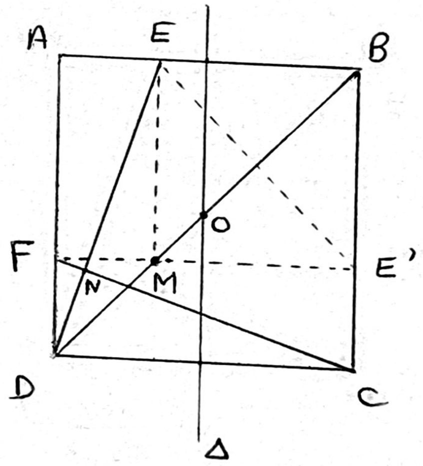
• 2° solution : géométrique, en utilisant l'outil isométrie.

On remarque :

$s_{BD}(E) = E'$

$s_{\Delta}(E') = F$

où Δ est la médiatrice de $[AB]$



Ainsi $\begin{cases} s_{\Delta} \circ s_{BD}(E) = F \\ s_{\Delta} \circ s_{BD}(D) = C \end{cases}$

$s_{\Delta} \circ s_{BD}$ étant la rotation de centre O et d'angle $2.(\widehat{BD,\Delta}) = +\frac{\pi}{2}$, on trouve $(ED) \perp (FC)$.

Réciproquement, il faut voir si, $N \in \mathcal{C}$ étant donné, il existe M tq la construction proposée permette d'aboutir à N.
Si M n'est pas sur le quart de cercle $\widehat{DO}$, (DN) ne coupe pas [AB] ou (CN) ne coupe pas [AD].
Supposons que $N \in \widehat{DO}$. Alors (DN) coupe [AB] en E, et (CN) coupe [AD] en F.
Il faut prouver que $N \in \mathcal{E}$, ie que la perpendiculaire à (AB) passant par E coupe la perpendiculaire à (AD) passant par F en un point de [BD].

Soit M l'intersection de la perpendiculaire à (AB) passant par E, et (BD).
On construit le projeté F' de M sur [AD]. Le sens direct a montré que $(CF') \perp (DE)$.
Comme $(CF) \perp (DE)$, F et F' seront à l'intersection de (AD) et de la perpendiculaire à (DE) passant par C, donc F = F'
CQFD

Objectifs : - Recherche d'un lieu géométrique
a) en utilisant un repère et des coordonnées
b) en utilisant des isométries planes.

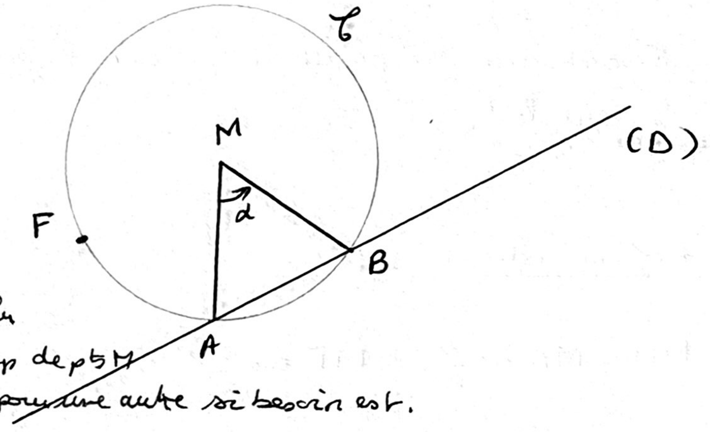
Contexte : - exercice de recherche, s'il est donné sans indications. Il permet de poser une conjecture en dessinant plusieurs points de $\mathcal{E}$. De plus la solution analytique est très abordable.
- exercice dont on peut détailler l'énoncé si la solution géométrique est proposée.

Soit (D) une dte d'un plan (P), F un point de (P) non situé sur (D), α un nombre réel de l'intervalle $]0,\pi[$.
Un cercle $\mathscr{C}$ de centre M passe par F et coupe (D) en 2 points A et B tq

$$\widehat{AMB} = \alpha$$

Déterminer l'ensemble des centres M de tels cercles $\mathscr{C}$.

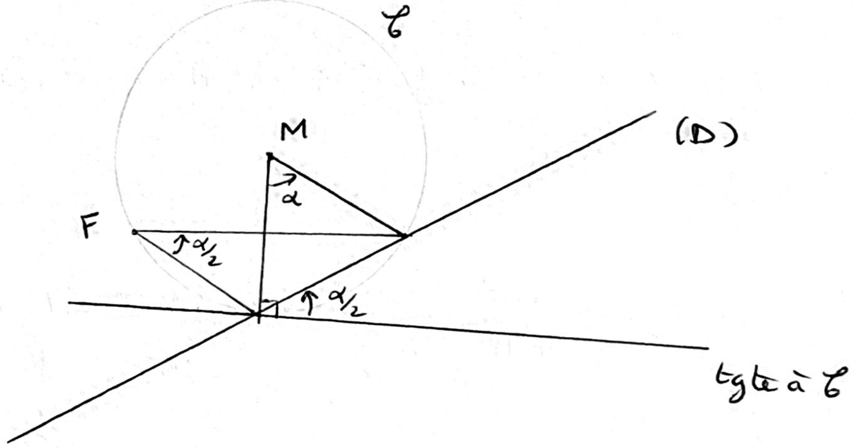
* Analyse :



- exercice de recherche et d'approf.
- but : apprendre à réagir sur un pb de recherche de lieux géom. défini par une condition d'angle → a) Supposer le pb résolu
  b) Construire beaucoup de pts M
  c) Troquer une idée pour une autre si besoin est.
- Penser à la réciproque !

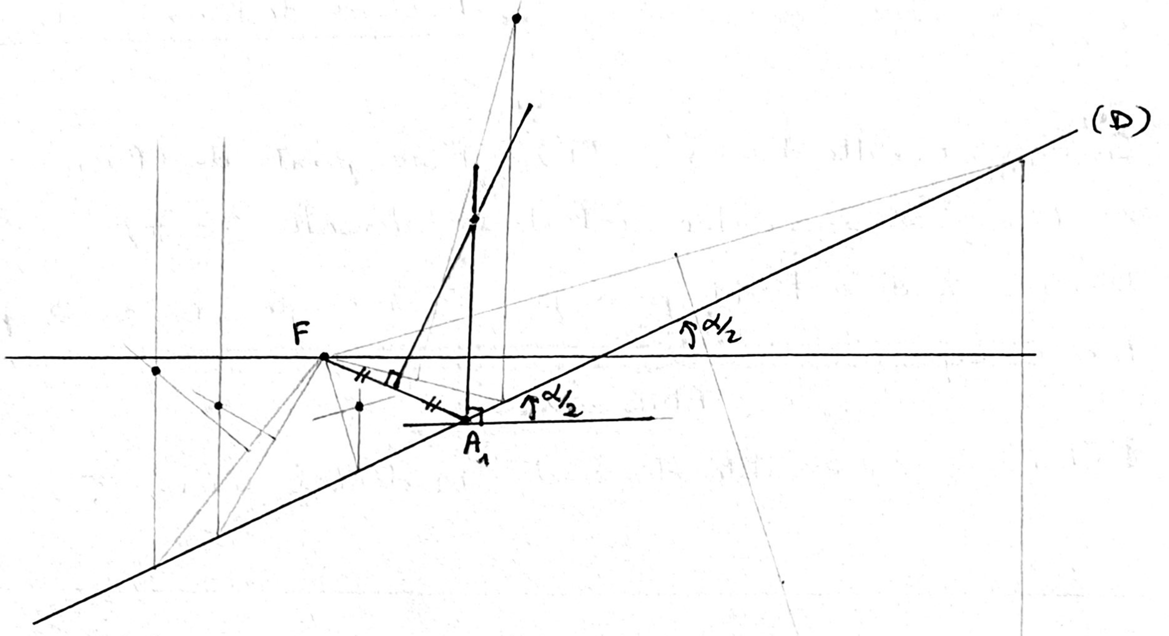
* 1ère idée : construction pt par pt de l'ensemble Σ des pts M.

On note que :



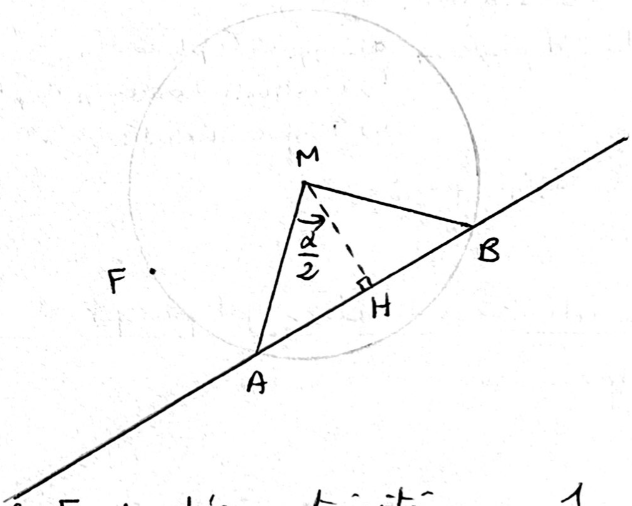
d'où la construction suivante que l'on rapprochera de la construction d'une parabole par pts et tangentes.

(Fractale TCE 92, p 280)



On subodore une parabole ou une hyperbole. On voit 2 nappes : ce serait une hyperbole !

* 2ème idée :



$MH = MA \cos\frac{\alpha}{2} = MF \cos\frac{\alpha}{2}$

donc $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ (*)

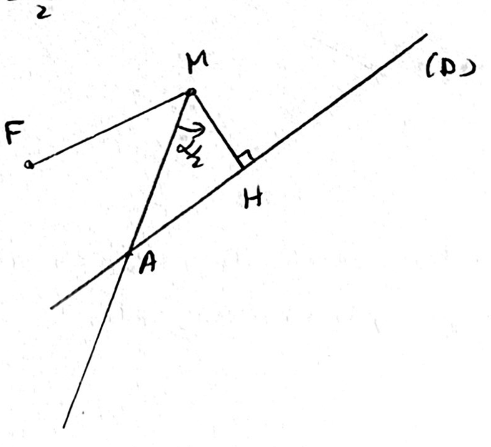
$\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} > 1$ (on suppose $\alpha \neq \pi$)

(*) définit l'hyperbole $\mathcal{H}$ de foyer F et d'excentricité $e = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

On a : $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$.

Réc. $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ car si $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, on construit $A \in (D)$ tq

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MH}) = \frac{\alpha}{2}$ $[2\pi]$:



Le cercle $\mathcal{C}(M, MA)$ coupe (D) en A et B comme dans l'énoncé,

et $MF = MH \cos\frac{\alpha}{2} = MA \Rightarrow F \in \mathcal{C}$.

CQFD

Exemple d'emploi de repère cartésien pour l'étude de lieux géom.

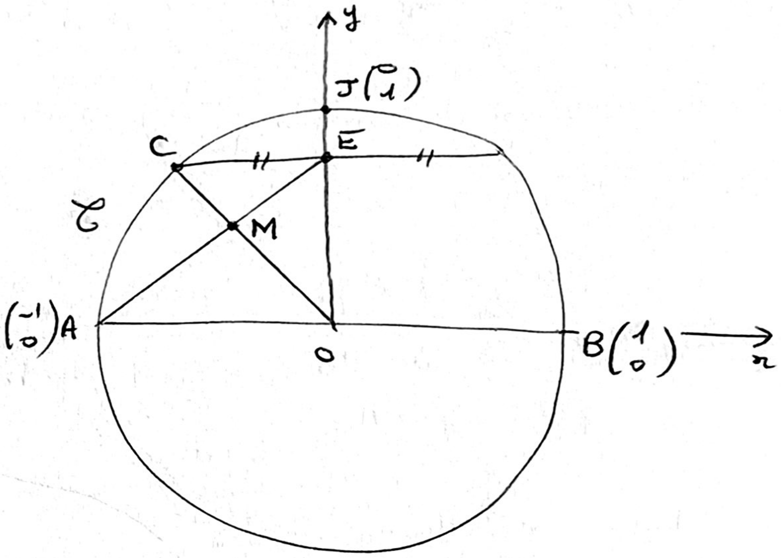
Soit $\mathcal{C}$ un demi-cercle de diamètre [AB]. A tout point C de $\mathcal{C}$ on associe le milieu E de la corde passant par C et parallèle à (AB), et le pt d'intersection M des droites (AE) et (OC) lorsque ces dtes sont sécantes (O est le milieu de [AB].

1) Déterminer l'ensemble Γ des pts M quand C décrit $\mathcal{C}$

2) Mq M décrit un morceau de parabole dont on précisera le foyer et la directrice.

1)

Repère (O, B, J)



$E\begin{pmatrix}0\\ \lambda\end{pmatrix}$ où $\lambda \in [0,1]$

Les dtes (OC) et (AE) sont sécantes ssi $\lambda \neq 0$.

$C\begin{pmatrix}-\sqrt{1-\lambda^2}\\ \lambda\end{pmatrix}$ où $\lambda \in]0,1]$

(AE) : $y = \lambda(x+1)$

$\vec{OM} = k\vec{OC} = k\begin{pmatrix}-\sqrt{1-\lambda^2}\\ \lambda\end{pmatrix}$

$M \in (AE)$ s'écrit $k\lambda = \lambda\left(-\sqrt{1-\lambda^2}+1\right)$, donc $k = \dfrac{1}{1+\sqrt{1-\lambda^2}}$, et le pt M aura pour coordonnées :

$$(1) \qquad M\begin{cases} x = \dfrac{-\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} \\ y = \dfrac{\lambda}{1+\sqrt{1-\lambda^2}} \end{cases} \qquad \lambda \in]0,1]$$

2) L'énoncé nous donne un indice de plus : il parle de parabole.
Si Γ est inclus dans une parabole, l'axe de la parabole ne peut être que $Ox = (OB)$ (raisons de symétrie...) et l'équ. de la parabole $\mathcal{P}$ sera de la forme $x = ay^2 + by + c$ (2)

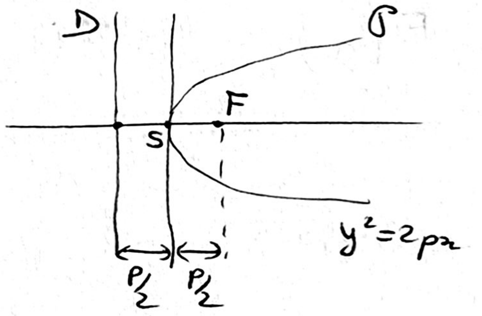
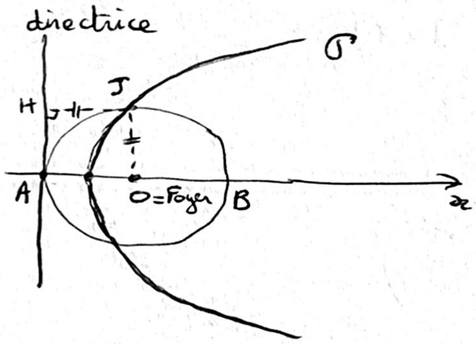
→ Remplacer (1) dans (2), et identifier les coeff. On trouve :

$$\boxed{x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}} \qquad (3)$$

→ On vérifie facilement que (1) vérifie (3).

(3) s'écrit : $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}y^2$, donc :

- $\mathcal{P}$ est de sommet $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de paramètre $p = 1$ (rappel : $y^2 = 2px$)
- $\mathcal{P}$ est d'axe focal Ox
- $\mathcal{P}$ sera de foyer : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O$
- $\mathcal{P}$ sera de directrice $x = -1$, la tgte à $\mathcal{C}$ passant par A.



Ccl : On a le dessin